Winkel und Winkelmessung

F. Schweiger, Salzburg

1) Was ist ein Winkel ?

In der Literatur findet man verschiedenste Definitionen für "Winkel", brauchbare und weniger brauchbare, äquivalente und nichtäquivalente, denn es gibt, wie man bei näherem Zusehen erkennt, verschiedene Begriffe von Winkel. Diese verschiedenen Winkelbegriffe hängen, wie sich zeigen wird, mit der Art der Winkelmessung zusammen, wobei hier wieder Zusammenhänge mit den zugelassenen Abbildungen (geometrischen Transformationen) bestehen. Wir wollen, im Anschluß an die vorliegende Literatur, zunächst drei Winkelbegriffe in der Ebene aufzeigen:

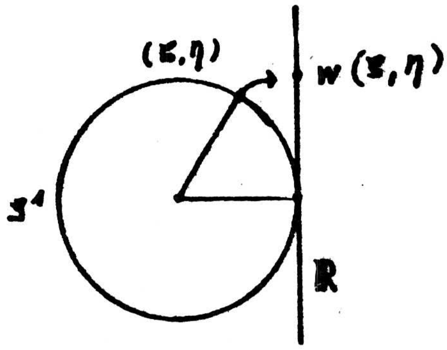
a) Elementargeometrischer Winkel.

Dieser ist lokal und unorientiert; er entspricht zunächst am ehesten der landläufigen Vorstellung eines Winkels: Ein Winkel wird von zwei Geraden, zwei Ebenen, zwei Straßen, zwei Kanten etc. eingeschlossen. Ein Kind versteckt sich im hintersten Winkel des Gartens, es durchstöbert das Haus bis in den letzten Winkel; zwei Bäume stehen eng beisammen oder weit auseinander (dies bezieht sich auf unseren Sehwinkel !), ein Keil ist spitz oder stumpf (wobei ein stumpfer Keil nicht unbedingt einem "stumpfen Winkel" im elementarmathematischen Sinn entsprechen muß !) ...

Dieser Winkelbegriff hat einen durchaus lokalen Charakter (mathematisch sind wir in der Nähe des Filterbegriffs).

Es ist vielfach üblich, folgende Definition zu verwenden:

Ein Winkel (oder besser: ein Winkelfeld) ist Durchschnitt zweier Halbebenen.



Daher existiert die Umkehrfunktion

$$w^{-1}:[0,2\pi[\longrightarrow S^1$$

Definiert man nun $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ durch

$$f(x) = w^{-1}(y)$$

für $\qquad x = y + 2k\pi, \quad 0 \leq y < 2\pi,$

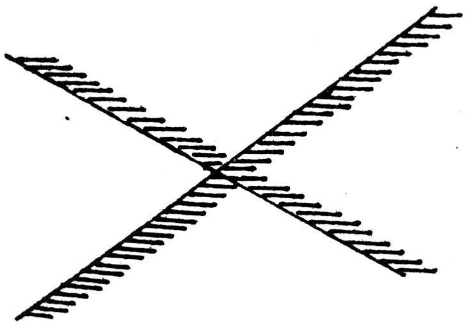
so heißt jede Zahl x mit $f(x) = (\zeta,\eta)$ ein Argument oder analytisches Bogenmaß des (goniometrischen!) Winkels, der von den Punkten $(1,0)$, $(0,0)$, (ζ,η) eingeschlossen wird.

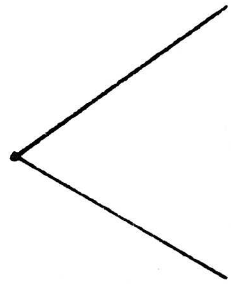
Anschaulich: Läßt man das Rad S^1 auf der Geraden $\mathbb{R}^1$ abrollen, so berührt $(\zeta,\eta) \in S^1$ die Gerade $\mathbb{R}^1$ gerade in den Punkten x mit $f(x) = (\zeta,\eta)$ und diese Punkte x liegen im Abstand 2π äquidistant. Man sieht hier, daß man den analytischen Winkelbegriff selbst nicht verwendet, wohl aber die Erweiterung der Winkelmessung: Jeder goniometrische Winkel besitzt unendlich viele analytische Winkelmaße, die sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden.

Definiert man sodann $\cos x := \zeta$, $\sin x := \eta$, so hat man eine bequeme Einführung der Winkelfunktionen als Funktionen des Bogenmaßes (nimmt man das Gradmaß, so erhält man eine <u>andere</u> Sinus- und Kosinusfunktion, wie am Taschenrechner deutlich erkennbar ist).

Es sei noch erwähnt, daß <u>Freudenthal</u> - <u>Baur</u> einen sogenannten analytisch-geometrischen Winkel betrachten: Ein geordnetes Paar von Geraden. Dies entspricht der Formel

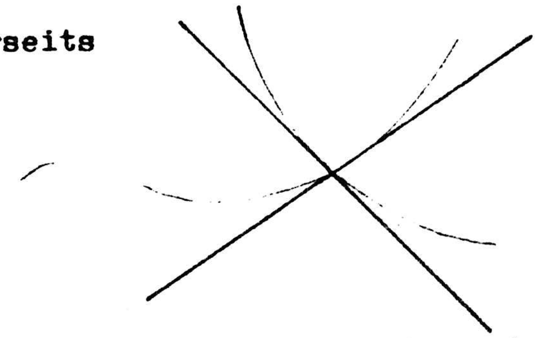
$$\tan \alpha = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$$



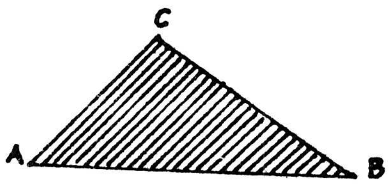


Oder: ein Winkel ist ein Paar von Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt.

Beide Definitionen sind brauchbar, aber es sollte uns klar sein, daß sie den intuitiven Gehalt des Begriffes "Winkel" nur bedingt wiedergeben, der "lokale" Charakter geht verloren, denn der Winkel ist ja durch einen (beliebig) kleinen Ausschnitt schon gegeben; was weit draußen im Durchschnitt zweier Halbebenen geschieht, interessiert niemand, statt des Paares zweier Halbgeraden würde ein Paar von Strecken mit gemeinsamem Anfangspunkt genügen. In der höheren Mathematik erklärt man ja dann auch den Schnittwinkel zweier Kurven durch den Schnittwinkel der Tangenten, die ihrerseits



durch eine beliebige Umgebung des Schnittpunktes festgelegt sind. Der lokale Charakter dieses Winkelbegriffs fällt auch im Dreieck auf. Charakterisiert wird



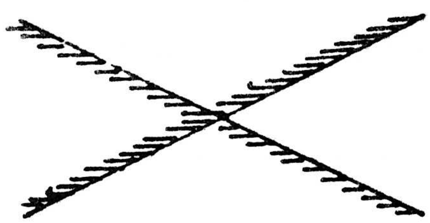
ja durch den Winkel bei A eine Eigenschaft der "Ecke" des Dreiecks (und nicht eine Eigenschaft von Halbevenen etc.).
Der elementargeometrische Winkelbegriff ist unorientiert: Die beiden Halbebenen sind gleichberechtigt, die zwei Halbgeraden werden als ungeordnetes Paar betrachtet. Gemessen wird dieser Winkel mit einem Halbkreis, d.h. mit einem Winkelmesser etwa von 0^o bis 180^o bzw. 0 bis π. Auf einige Fragen des Messens soll dabei später eingegangen werden. In der analytischen Geometrie entspricht ihm die Formel

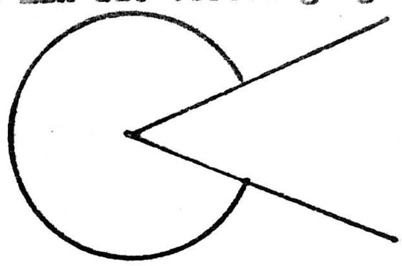
$$\cos \alpha = \frac{r_1 \cdot r_2}{\|r_1\| \, \|r_2\|}$$

(wobei cos als Funktion auf dem Intervall $[0,\pi]$ bzw. $[0, 180^o]$ aufgefaßt wird).
Vertauschung von r_1 und r_2 spielt keine Rolle! Auch Spiegelung an einer Geraden läßt diesen Winkel unverändert.

b) Goniometrischer Winkel.

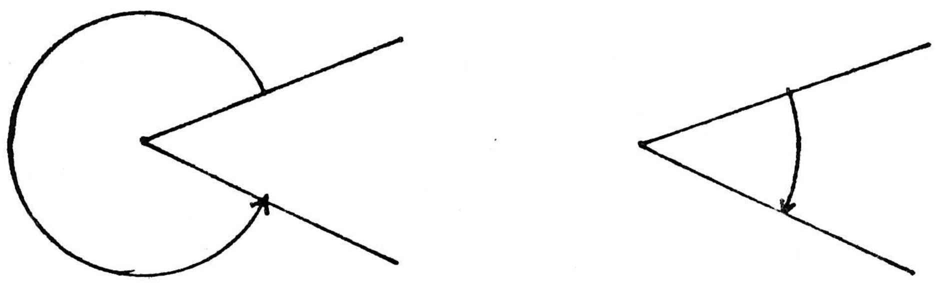
Dieser ist <u>lokal</u> und <u>orientiert</u>. Ganz bescheiden melden sich Orientierungsbegriffe im Alltag an: Rechts - links, oberhalb - unterhalb, ein Berg ist 2 km hoch, das Meer ist 2 km tief, der Wind bläst aus Süd, die Vögel ziehen nach Nord. Der goniometrische Winkelbegriff entsteht aus dem elementargeometrischen Winkelbegriff durch Hinzunahme einer Orientierung. Eine mögliche Definition ist: Ein Winkel ist ein geordnetes Paar von Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt.
Will man mit Halbebenen arbeiten, so müßte man die Vereinigung





(oder das Komplement des Durchschnittes) zweier Halbebenen hinzunehmen, um zu überstumpfen Winkeln zu gelangen, aber sehr elegant ist das nicht, und die sich anbahnende Orientierung der Ebene geht verloren. Der goniometrische Winkel wird entweder von 0° bis 360° bzw. 0 bis 2π gemessen oder von -180° bis $+180^\circ$ bzw. $-\pi$ bis $+\pi$. Man beachte, daß diese beiden verschiedenen Messungen zwei konkurrierenden (gleichwohl mathematisch äquivalenten) Vorstellungen entsprechen.

Im ersten Fall wird eine Drehrichtung in der Ebene festgelegt und der Winkel so gemessen, daß die erste



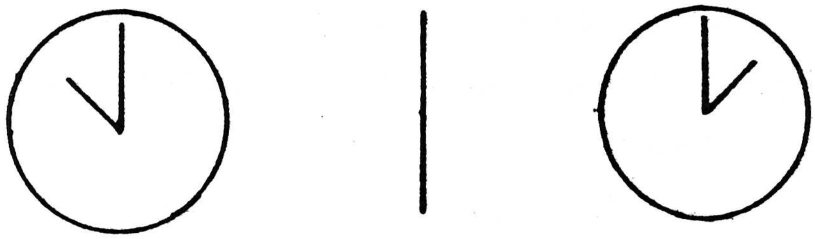
Halbgerade in der festgelegten Drehrichtung in die zweite Halbgerade gedreht wird. Hier treten überstumpfe Winkel auf !

Im zweiten Fall wird ebenfalls eine Drehrichtung festgelegt, aber der Winkel so gemessen, daß man die (als) erste (angesehene) Halbgerade in oder entgegen der festgelegten Drehrichtung, aber auf kürzestem Weg in die zweite Halbgerade dreht. Hier treten keine überstumpfen Winkel auf. Diese Messung ist (obwohl sie zu negativen Maßzahlen greift) sehr tief verankert: Man fährt an der ersten Ampel nach links und dann die zweite Straße rechts. Niemand würde sagen: bei der ersten Ampel 90° und dann die zweite Straße 270°.

In der analytischen Geometrie benötigt man die beiden Formeln

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2}{\|\mathfrak{r}_1\| \, \|\mathfrak{r}_2\|} \qquad \sin\alpha = \frac{\det(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)}{\|\mathfrak{r}_1\| \, \|\mathfrak{r}_2\|}$$

um den Winkel modulo 2π festzulegen! Die Formel für $\sin\alpha$ ist sensibel gegenüber Vertauschung und Spiegelung an einer Geraden.



Ist es 10 Uhr, so zeigt die gespiegelte Uhr 2 Uhr. Die orientierte Ebene gestattet nur lineare Abbildungen mit Determinante > 0.

c) Analytischer Winkel.

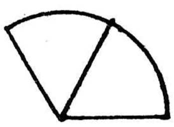
Der analytische Winkel hat mehrere Quellen und Ursachen, die zusammenwirken: Die stetige Fortsetzung einer Drehung führt zu ihm! Denn eine Drehung um 360° ist ein "Ereignis", welches von der identischen Abbildung, d.h. der Drehung um 0° verschieden ist. Als Abbildung im Sinne des mengentheoretischen Abbildungsbegriffes ist eine Drehung um 360° ebenfalls die identische Abbildung, aber wenn man den Drehvorgang betrachtet, die Bahn eines Punktes oder die von einem Punkt im Laufe einer Umdrehung zurückgelegte "Winkelsumme" mißt (eine Präzisierung dieses Begriffes wird durch die Windungszahl gegeben), so gibt es sehr wohl einen Unterschied! Überlagert man den goniometrischen Winkelbegriff mit der additiven Gruppe der ganzen Zahlen (d.h. zählt man die Anzahl der Drehungen rechts bzw. links herum), so erhält man den analytischen Winkel: ein analytischer Winkel ist ein geordnetes Paar von Halbgeraden zusammen mit einer ganzen Zahl, die eine Anzahl von Drehungen mißt!
Das Maß eines analytischen Winkels ist daher zunächst ein geordnetes Paar $(w(\alpha), z)$, wo $0 < w(\alpha) < 2\pi$, wenn man den Winkel im Bogenmaß mißt (bzw. $0 \leq w(\alpha) < 360$ im Gradmaß), und z eine ganze Zahl ist. Die Abbildung

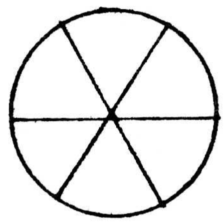
$$(w(\alpha), z) \longrightarrow z + w(\alpha)$$

bildet alle Winkelmaße analytischer Winkel bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab.
Eine weitere Quelle des analytischen Winkelbegriffes ist die Erweiterung der Additivität des Winkelmaßes "im Kleinen". Schon die Winkelmaße "kleiner" elementargeometrischer Winkel genügen der Bedingung

$$w\ (\alpha+\beta) = w(\alpha) + w\ (\beta)$$

Dabei bedeutet $\alpha+\beta$ das Aneinanderlegen zweier Winkel. Durch fortgesetztes Aneinanderlegen entstehen bald Winkelmaße über 180^o bzw. 360^o.
Dabei stößt man auf Grenzen!
Zwei 60^o-Winkel aneinandergelegt ergeben einen Winkel von 120^o.





Aber sechs 60^o-Winkel aneinandergelegt? Kann man da überhaupt von Winkel sprechen? Ein Tortenstück beschreibt einen Winkel, aber die ganze Torte?
Andererseits ist es sinnvoll zu sagen, die Winkelsumme im Viereck ist 360^o (und nicht 0^o), die Winkelsumme im Fünfeck ist 540^o (und nicht 180^o). Letztlich sind es die Winkelfunktionen selbst, die eine Erweiterung des Winkelmaßes fordern. Denn, beschreibt $x(t) = \sin \omega\ t$ eine harmonische Schwingung, so ist eine Einschränkung von t auf $[0, \frac{2\pi}{\omega}[$ nicht sinnvoll. Die Erweiterung des Winkelmaßes ist etwa so vorzunehmen: Ist

$$w: S^1 \longrightarrow [0,2\pi[$$

die Funktion, die jedem Punkt $(\xi, \eta) \in S^1$ die Bogenlänge des Kreisbogens von $(1,0)$ nach (ξ,η), gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, zuordnet, so ist w bijektiv.

2. Winkelmessung

Es sei hier zunächst erinnert, daß der Einführung der Winkelmessung (wie jeder Messung) zwei Schritte vorauszugehen haben: Qualitative Beschreibungen und Motivation des Messens. Einige Hinweise auf qualitative Beschreibungen wurden im ersten Teil angedeutet. Auch die Fragestellungen: Ist ein Winkel größer als ein anderer Winkel? Kann man einen doppelt so großen Winkel oder einen halb so großen Winkel herstellen? sollten diskutiert werden, bevor man einer exakteren Definition von Größe (Winkelmaß) nähertritt.

Eine Motivation des Messens kann gegeben werden durch die Ungenauigkeit qualitativer Angaben ("Wie weit rechts?" "In welcher Richtung?") und durch die Notwendigkeit, Situationen oder Ortsangaben festzulegen, in einer Skizze, in einem Protokoll, damit eine Rekonstruktion später oder eine Nachrichtenübermittlung per Funk oderTelefon möglich sind. Hier sollten geschickt gewählte motivierende Aufgaben nicht fehlen!

Die Längenmessung verwendet eine Einheitsstrecke (ein Lineal) und zunächst werden nur Längen gemessen, die ganzzahlige Vielfache dieser Einheitsstrecke sind. Analog (im Sinne des Integrationsprinzips) sollte man zunächst für die Winkelmessung einen festen Winkel (einen Kreissektor etwa) wählen und Winkel messen, die sich durch ganzzahliges Aneinanderlegen ausmessen lassen. Da dies nicht ausreichend ist, wird man, wie in der Längenmessung,dazu geführt, durch Teilung (Halbierung oder Zehntelung) entstehende kleinere Einheiten zu verwenden. Die Winkelmessung unterscheidet sich von der Längenmessung in zwei wesentlichen Punkten (und im Sinne des Redundanzprinzips sollten sie deutlich werden): Für die Längenmessung gibt es kein "natürliches" Lineal. Man muß durch Verordnung eine Einheitsstrecke festlegen. Das Urmeter liegt

in Paris. Für die Winkelmessung bieten sich natürliche "Einheitswinkel" an: der rechte Winkel oder der Winkel in einem beliebigen gleichseitigen Dreieck (oder - meines Erachtens weniger gut - der gestreckte Winkel). Es ist allerdings dann ein keiner historischer Exkurs nötig, um zu erklären, daß diese "Einheitswinkel" nun das Winkelmaß 90° oder 60° bekommen (oder 180°). Der Winkel im gleichseitigen Dreieck ist hier vielleicht vorzuziehen, denn die Einteilung in 60 Teile ist schon von der Einteilung Stunde in Minuten, Minute in Sekunden bekannt. Halten wir fest, was es heißt, daß der Winkel im gleichseitigen Dreieck 60° ist: Es gibt einen (trigonometrischen) Winkel, der, sechzigmal aneinandergelegt, den Winkel im gleichseitigen Dreieck ergibt. Selbstverständlich sollte man erwähnen, daß die Geodäten in Neugrad messen.
Die Winkelmessung im Bogenmaß beruht auf einem etwas anderen Prinzip: Das Bogenmaß des Winkels ist das Verhältnis von Bogenlänge zu Radius in einem Kreissektor (Tortenstück).
Der zweite wesentliche Punkt ist, daß es keine beliebig großen Winkel gibt (solange man den analytischen Winkel nicht hat!): Man kommt mit der Skala 0° bis 180° bzw. 0° bis 360° aus. Ist ein beliebiger Kreissektor gegeben, so kann man damit durch Aneinanderlegen in endlich vielen Schritten den Vollwinkel auslegen bzw. überschreiten.
Zuletzt sei erwähnt, daß die Frage der <u>Berechnung von Winkelmaßen</u> ein weiteres Problemfeld einschließt.

3. <u>Vergleich der Strukturen S^1 und $\mathbb{R}^1$</u>

Zuletzt sei es gestattet, das Augenmerk auf zwei fundamentale Strukturen zu legen, auf den Einheitskreis S^1 und die reelle Gerade $\mathbb{R}^1$. Dabei ist es oft bequem, S^1 als Menge aller komplexen Zahlen α mit $|\alpha| = 1$ aufzufassen. S^1 und $\mathbb{R}^1$ sind <u>topologische Räume</u>: S^1 ist <u>kompakt</u> (dies entspricht der Tatsache, daß es geometrisch gesehen keine "beliebig großen" Winkel gibt), $\mathbb{R}^1$ ist nicht kompakt (es gibt beliebig lange Strecken). Beide Räume sind zusammenhängend. Entfernt man aus S^1 einen Punkt, so bleibt der Raum zusammenhängend. Entfernt man aber aus R^1 einen Punkt, so zerfällt die Gerade. R^1 ist (bezüglich des "Kleinergleich") eine linear geordnete Menge, S^1 hingegen kann in keiner "natürlichen" Weise linear geordnet werden. Genauer etwa so: die lineare Ordnung in R^1 verträgt sich mit der Addition (aus $x \leq y$ folgt $x+z \leq y+z$), hingegen kann man S^1 nicht so linear ordnen, so daß man Verträglichkeit mit der Multiplikation erhält (d.h., daß aus $\alpha \leq \beta$ folgt $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$). Denn ist etwa

(1) $i \leq 1$,

so folgen (Multiplikation mit i) nacheinander

(2) $-1 \leq i$

(3) $-i \leq -1$

(4) $1 \leq -i$

Aus (1) und (4) folgt $i \leq -i$, aus (2) und (3) folgt $-i \leq i$, ein Widerspruch!

S^1 und R^1 sind (wie zuvor schon angedeutet) abelsche Gruppen: S^1 bezüglich der Multiplikation, R^1 bezüglich der Addition. Die Abbildung

$$\phi: R^1 - S^1, \; t — \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t,$$

liefert einen stetigen Homomorphismus (Additionstheoreme der Winkelfunktionen!). Beide Strukturen sind teilbare abelsche Gruppen, d.h. die Gleichung $\alpha^n = 1$ bzw. $nx = 1$ ist in S^1 bzw. R^1 für jedes n lösbar. Ist n eine natürliche Zahl, so bildet $\{\frac{z}{n} : z \in Z\}$ eine diskrete Untergruppe von R^1, die durch ϕ auf eine diskrete Untergruppe von S^1, den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, abgebildet wird. Übrigens sind alle diskreten Untergruppen von R^1 untereinander isomorph. Dafür sind die diskreten Untergruppen von S^1 alle endlich. Der Tatsache, daß man jede Strecke bzw. jeden Winkel "messen" kann, entspricht, daß S^1 und R^1

beides <u>vollständige metrische</u> Räume sind (wobei im $\mathbb{R}^1$ das archimedische Axiom hinzutritt). Eine weitere Kontrastierung erhält man, wenn man bedenkt, daß die Gerade $\mathbb{R}^1$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ein schönes zweidimensionales Analogon besitzt, hingegen der Kreis S^1 zwei wesentlich verschiedene zweidimensionale Verallgemeinerungen aufweist: die Kugelfläche S^2 und der Torus $S^1 \times S^1$, wobei sich die Kugelfläche S^2 als bedeutend verschieden erweist!

4. Einige Literaturhinweise

F.Denk: Elementare Fragen des Trigonometrieunterrichts. Der Mathematikunterricht, Jg.14, Heft 1, 5-27 (1968)

H.Freudenthal: Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, R.Oldenbourg, München Wien 1978

H.Freudenthal - A.Baur: Geometrie phänomenologisch. In: Grundzüge der Mathematik II A.1, Vandenhoeck & Rupprecht Göttingen 1960.

Univ.Prof.F.Schweiger
Institut für Didaktik der Naturwissenschaften
Universität Salzburg, 5020, Petersbrunnstr.19